

Méthode de Gauss :

La méthode de Gauss est divisée en 2 étapes :

1. Triangularisation de A

2. Substitution arrière

Exp : Soit à résoudre le système ci-dessous par la méthode de Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

soit :

1. Triangularisation de A

fonction apparaît "1" à la place de a_{00} , ensuite des "0" dans la 1^{ère} colonne pour a_{10}

$$L_0 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$L_0 / 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_0 \\ L_1 - 3L_0 \\ L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 - 2L_0 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

* Apparaitre "1" à a₁₁, "0" dessous

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 / -4 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

* Apparaitre "1" à a₂₂, "0" au dessous

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 / -4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

2. Sub Arr

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 3 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x_0 = 7 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow x_0 = 2$$

Vérification:

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 14$$

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 9$$

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10$$

Exp 2: Résoudre le système ci-dessous par la méthode de Gauss

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 - 3L_0 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

=> La solution:

$$\begin{array}{l} L_0/2 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_0 \\ 1 - L_0 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ -3L_0 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 4 & 2 & 17 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 L_0 \\
 L_1 \\
 L_2 + 7L_1 \\
 L_3 + L_1
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
 0 & 0 & 11 & 9 & 38 \\
 0 & 0 & 3 & 2 & 9
 \end{array}
 \right)$$

$$\begin{array}{l}
 L_0 \\
 L_1 \\
 L_2/11 \\
 L_3
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & 9/11 & 38/11 \\
 0 & 0 & 3 & 2 & 9
 \end{array}
 \right)$$

$$\begin{array}{l}
 L_0 \\
 L_1 \\
 L_2 \\
 L_3 - 3L_2
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & 9/11 & 38/11 \\
 0 & 0 & 0 & 5/11 & 0
 \end{array}
 \right)$$

Permutation - partielle (Pivot nul)

Exp: Résoudre utilisant Gauss

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

=> La solution:

$$\begin{array}{l} L_0 / 3 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8/3 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 - 3L_0 \\ L_2 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8/3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \\ 0 & -2/3 & 1 & 18 \end{array} \right)$$

=> Permutation de colonnes la colonne du pivot

$$P \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$L_0 / 9 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8/9 & 1/3 & 6 \\ 1 & 8 & 3 & 11 \\ 4 & 2 & 1 & 20 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 - L_0 \\ L_2 - 4L_0 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 8/9 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 64/9 & 8/3 & 13/3 \\ 0 & -14/9 & -1/3 & 52/3 \end{array} \right)$$

Exp 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

→ La solution :

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -22 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 11 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_0/2 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -11 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 11 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 - L_0 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 2 & 4 & 11 & -1 \end{array} \right)$$

Submax :

$$\begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & -22 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 11 & 4 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_0/6 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 1/3 & -11/3 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 11 & 4 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 L_0 \\
 L_1 - 5L_0 \\
 L_2 - 11L_0
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2/3 & 1/3 & -11/3 \\
 0 & 4/3 & -2/3 & 76/3 \\
 0 & 10/3 & -5/3 & 118/3
 \end{array} \right)$$

$(4/3) \rightarrow (-2/3)$

Pas de permutation

$$\begin{array}{l}
 L_0 \\
 L_1 \times \frac{3}{4} \\
 L_2
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2/3 & 1/3 & -11/3 \\
 0 & 1 & -2/4 & 19 \\
 0 & 10/3 & -1/3 & 117/3
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 L_0 \\
 L_1 \\
 L_2 - \frac{10}{3} L_1
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2/3 & 1/3 & -11/3 \\
 0 & 1 & -2/4 & 19 \\
 0 & 0 & -5/3 & -24
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
 L_0 \\
 L_1 \\
 L_2 \times -\frac{3}{5}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2/3 & 1/3 & -11/3 \\
 0 & 1 & -2/4 & 19 \\
 0 & 0 & 1 & 72/5
 \end{array} \right)$$